



TITLE:

# 線形樹化数について(グラフ理論とその応用)

AUTHOR(S):

中山, 明

---

CITATION:

中山, 明. 線形樹化数について(グラフ理論とその応用). 数理解析研究所  
講究録 1982, 471: 51-67

ISSUE DATE:

1982-10

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/103246>

RIGHT:

## 線形樹化数について

電通大

中山 明

NAKA YAMA AKIRA

### 1. Introduction

ここで扱うグラフは、単純無向グラフとする。グラフ  $G$  に対して、 $G$  の辺集合を分割する問題を考える。まず線形林とは、 $G$  の各成分が道となっているグラフのことである。このとき、 $G$  を線形林に分割した時の線形林の最小個数が問題となる。この数を線形樹化数と呼び、 $\Xi(G)$  で表わす。この概念は、F. Harary によって導入され、今までに種々の結果が知られている。さらに応用面としては、情報検索等に利用する際、一つの数学的モデルとしてとらえることができる。これから、今までに得られている結果とその証明方法を紹介し、線形樹化数とグラフの演算（ここでは、Cartesian product を扱った。）との関係を述べることにする。

### 2. Definitions and Notations

$K_p$  …… 位数  $p$  の完全グラフ

$K(m, n)$  ..... 部集合  $V_1, V_2$  が,  $|V_1|=m, |V_2|=n$  なる完全二部グラフ。

$\Delta(G)$  ..... グラフ  $G$  の最大次数。

$G_1 \times G_2$  .....  $G_1$  と  $G_2$  の Cartesian product.

$L(G)$  .....  $G$  の line graph.

$Q_n$  .....  $n$ -cube で次のように定義される。

$$Q_n = Q_{n-1} \times K_2, Q_1 = K_2$$

$G$  の 2-factor .....  $G$  の 2-正則全域部分グラフ。

$G$  : 2-factorable .....  $G$  が 2-factor の辺和として表わされる場合。

$\oplus$  ..... 辺和を示す。

$c(e)$  ..... 辺  $e$  に塗られている色を示す。

$\langle \mathcal{F} \rangle$  .....  $\mathcal{F} (\subseteq V(G) \text{ or } E(G))$  によって誘導される  $G$  の部分グラフ。

$G$  の  $\{a, b\}$ -factor ..... 各点  $v$  の次数が,  $a \leq \deg v \leq b$  となっている  $G$  の全域部分グラフ。

$$\mathcal{G}_{\text{odd}} := \{ G \mid \text{odd-regular}, \Xi(G) = \left\{ \frac{\text{odd}+1}{2} \right\} \}$$

$$\mathcal{G}_r := \{ G \mid r\text{-regular}, \Xi(G) = \left\{ \frac{r+1}{2} \right\} \}$$

$$\mathcal{A}_r := \{ H \mid H : r\text{-regular} \}$$

$$G \setminus F := V(G \setminus F) = V(G), E(G \setminus F) = E(G) \setminus E(F).$$

$\{ \}$  ..... セカリ上げ。

今後、'線形林で覆われた' という代りに、'色  $c$  の線形林で塗られた' という表現も用いることにする。

### 3. Propositions and Theorems

Proposition 1  $G: r\text{-regular} \Rightarrow \Xi(G) \geq \left\{ \frac{r+1}{2} \right\}$

Proposition 2  $G$  は次の条件 (i), (ii) を満たすグラフとする。

$$\begin{cases} \text{(i)} \exists v \in V(G) \text{ s.t. } \deg v = 4 \\ \text{(ii)} \forall u \in V(G) \setminus \{v\}, \deg u = 3 \end{cases} \Rightarrow \Xi(G) = 2$$

Note: この命題は、[5] の中の Theorem 6 の特別な場合に相当している。

Proposition 3  $\Xi(G) \geq \left\{ \frac{\Delta(G)}{2} \right\}$

Proposition 4  $\mathcal{M}_{2k-1} = \mathcal{G}_{2k-1}$  となる  $k$  が存在すれば、

$$\mathcal{M}_{2k} = \mathcal{G}_{2k}$$

Theorem A  $K_{2n+1}$  は  $n$  個の Hamiltonian cycle の辺和として表現できる。

Theorem B  $G$ : 自明でない連結グラフとする。

$G$ : オイラー回路をもつ  $\Leftrightarrow G$  のどの点の次数も偶数

Theorem C [Petersen]

$G: 2\text{-factorable} \Leftrightarrow G: \text{even-regular}$

### 4. 特殊なグラフの族についての線形樹化数

今までに知られている結果を示すと次のようになる。

Theorem (a) [秋山, Exoo, Harary]

$$T: \text{木} \Rightarrow \Xi(T) = \left\{ \frac{\Delta(T)}{2} \right\}$$

Theorem(b) [Stanton, Cowan, James]

$$\Xi(K_p) = \left\{ \frac{p}{2} \right\}$$

Theorem(c) [秋山, Exoo, Harary]

$$\Xi(K(m, n)) = \left\{ \frac{m + \delta(m, n)}{2} \right\}$$

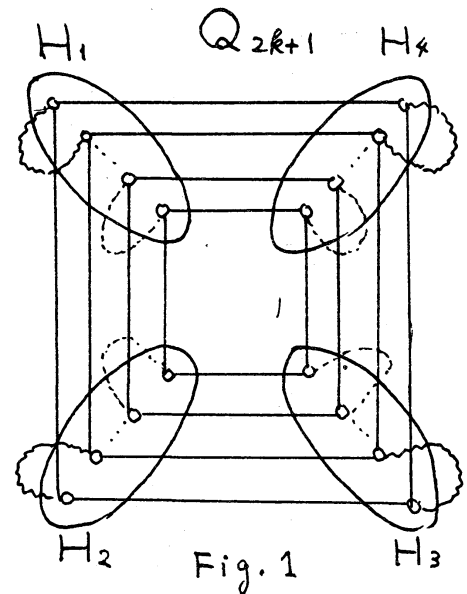
ただし、 $m \geq n$  とし、 $\delta(m, n)$  は Kronecker delta とする。

これより新しい結果を示す。

Theorem(d) (中々)  $\Xi(Q_n) = \left\{ \frac{n+1}{2} \right\}$

(proof)  $Q_{2k}$  と  $Q_{2k+1}$  に分けて考える。まず  $Q_{2k+1}$  は、 $k$  に関する帰納法によって求める。 $\Xi(Q_{2k-1}) = k$  と仮定し、 $Q_{2k+1} = Q_{2k-1} \times C_2$  に変形する。

このとき、 $k$  色の線形林で塗られた  $Q_{2k-1}$  に対して各色の線形林の成分である道に注目する。各道の端点を組にして、この彩色されたグラフの点集合を並びかえて得られるグラフを  $H$  とする。ここで、 $H$  のコピー  $H_i$  ( $i=1, \dots, 4$ ) を用意し、



各  $H_i$  の対応する点を辺で結び Fig. 1 のように構成する。すると  $Q_{2k+1}$  は、新しい 1 色を追加し、 $(k+1)$  色の線形林で覆えることは明らかである。よって、 $\Xi(Q_{2k+1}) = k+1$ 。一方、

$Q_{2k}$  に対しては、 $\Xi(Q_{2k+1}) \geq \Xi(Q_{2k})$  は容易に得られる。さらに Proposition 1 より  $\Xi(Q_{2k}) \geq k+1$  となるので  $\Xi(Q_{2k}) = k+1$ 。以上をまとめれば、 $\Xi(Q_n) = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ 。  $\square$

Theorem (e) [中山]  $C_n$ : 位数  $n$  の cycle.

$$\forall G \in \mathcal{G}_r, \quad \Xi(G \times C_n) = \left\lfloor \frac{r+3}{2} \right\rfloor \quad (n \geq 3)$$

これを証明する為にいくつかの Lemmas を用意する。

Lemma 1

$$\forall G \in \mathcal{G}_{2m-1}, \quad \Xi(G \times C_n) = m+1 \quad (m \geq 1, n \geq 3)$$

(proof)  $\forall G \in \mathcal{G}_{2m-1}$  を選ぶと  $\Xi(G) = m$ 。よって  $1, \dots, m$  までの  $m$  色の線形林で、 $G$  が塗られている。しかも  $G$  の任意の点  $v$  は奇点より、この  $v$  が端点となっている色の道が存在する。従って、この彩色された  $G$  を以下のように構成できる。色  $i$  の  $j_i$  本の道の2つの端点をそれぞれ、 $u_1^i, v_1^i; u_2^i, v_2^i; \dots; u_{j_i}^i, v_{j_i}^i$  と置き、Fig. 2 のように並べる。

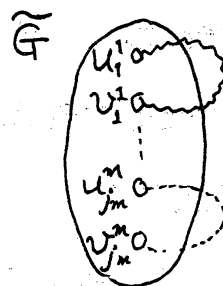
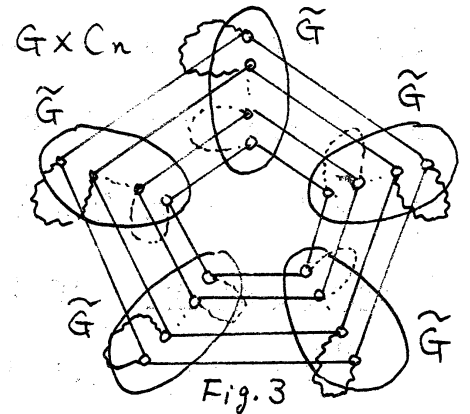


Fig. 2

このグラフを  $\tilde{G}$  とおく。さて、 $G \times C_n$  は  $G$  の  $n$  個のコピーを用いて書けるので、彩色された  $G \times C_n$  を構成する時に、 $G$  を  $\tilde{G}$  で置きかえる。そして、Fig. 3 のように、 $n$  個のコピーの各対応する点を組にして  $C_n$  で結ぶことにする。最後に、同心円状の  $C_n$  の部分を塗るには、外側から2つずつの  $C_n$  を組にすると、あと1色の線形林を用いて塗り分けるこ

とができる。(塗り方は一意的ではない。)従って、 $\Xi(G \times C_n) \leq m+1$ 。  
 一方、 $G \times C_n$  は  $(2m+1)$ -正則グラフであるから Proposition 1 を用いて  $\Xi(G \times C_n) \geq m+1$ 。以上をまとめれば  $\Xi(G \times C_n) = m+1$  が得られる。  $\square$



Lemma 2  $\forall G \in \mathcal{G}_{2m}, \Xi(G \times K_2) = m+1$

(proof)  $\forall G \in \mathcal{G}_{2m}$  をとると、 $\Xi(G) = m+1$ 。彩色された  $G$  のコピー  $G_1, G_2$  を用意する。ただし、 $G_1$  と  $G_2$  の塗り方は、同じとし  $1, \dots, m+1$  の色を用いることにする。

$$U_i := \{u_i \in V(G_i) \mid |\{u_i u \in E(G_i) \mid c(u_i u) = j\}| = 2, j = 1, \dots, m+1\}$$

$$V_i := \{v_i \in V(G_i) \mid \exists k \text{ s.t. } |\{v_i v \in E(G_i) \mid c(v_i v) = k\}| = 1\}$$

と定義する。まず  $U_i$  に属する点  $u_i$  に接続する辺には、 $m$  色の線形林しか使われていないので、 $u_1$  と  $u_2$  を残りの 1 色で塗られた辺で結ぶ。 $V_i$  に属する点  $v_1, v_2$  に対しては、次のような方法に従って彩色された辺を用いて、 $v_1$  と  $v_2$  を系結ぶ。i.e. cycle ができないように、しかも 2 本の道の端点どうしが共に一致しないように、 $m+1$  色で  $G_1$  と  $G_2$  の点をできるだけ結ぶ。このように彩色すれば、まだ結ばれていない点どうしを順次 cycle を作らないように  $m+1$  色の線形林で覆うことができる。したがって、 $\Xi(G \times K_2) = m+1$   $\square$

Lemma 3  $\forall G \in \mathcal{G}_{2m}, \exists(G \times C_n) = m+2 \quad (n \geq 3)$

(proof)  $\forall G \in \mathcal{G}_{2m}$  に対して、 $H = G \times K_2$  とおく。すると、  
Lemma 2 より  $\exists(H) = m+1$ , かつ  $H$  は  $(2m+1)$ -正則グラフ。  
したがって、 $H \in \mathcal{G}_{2m+1}$ 。さらに Lemma 1 より、

$$\exists(H \times C_n) = m+2$$

ところで、 $G \times C_n < H \times C_n$  に注意すれば、Proposition 1 を用いて、 $m+2 \leq \exists(G \times C_n) \leq \exists(H \times C_n) = m+2$ 。よって  $\exists(G \times C_n) = m+2$  を得る。  $\square$

以上 Lemma 1 と Lemma 3 をまとめて、Theorem(c) を得る。

Corollary  $\exists(Q_n) = \left\{ \frac{n+1}{2} \right\}$

(proof)  $Q_{2k+1}$  を  $k$  に関する帰納法で証明する。 $\exists(Q_{2k-1}) = k$  と仮定すると、 $Q_{2k-1} \in \mathcal{G}_{2k-1}$ 。従って Theorem(c) より

$$\exists(Q_{2k+1}) = \exists(Q_{2k-1} \times C_2) = k+1$$

となる。一方、 $\exists(Q_{2k}) = k+1$  となることは、 $Q_{2k}$  の構造より明らか。よって、 $\exists(Q_n) = \left\{ \frac{n+1}{2} \right\}$   $\square$

Theorem(f) [中山]

$$\exists(L(K(m, n))) = \left\{ \frac{m+n-1}{2} \right\}$$

これも、いくつかの Lemmas を用意して証明する。

Lemma 4  $G_1, G_2 \in \mathcal{G}_{\text{odd}}$ , ただし、 $G_i: (2k_i+1)$ -正則グラフとする。このとき、 $\exists(G_1 \times G_2) = k_1 + k_2 + 2$

(proof)  $V(G_1) = \{x_1, \dots, x_n\}$ ,  $V(G_2) = \{y_1, \dots, y_m\}$  とおく。



Cartesian product の定義より、 $V(G_1 \times G_2) = V(G_1) \times V(G_2)$ .

$$S_{x_i} := \{(x_i, y_l) \mid x_i \in V(G_1), y_l \in V(G_2) \ (l=1, \dots, m)\}$$

$$T_{y_k} := \{(x_j, y_k) \mid x_j \in V(G_1), y_k \in V(G_2) \ (j=1, \dots, n)\}$$

とおくと、 $\langle S_{x_i} \rangle \cong G_1$ ,  $\langle T_{y_k} \rangle \cong G_2$  が成立する。しかも仮定より、 $\Xi(\langle S_{x_i} \rangle) = k_1 + 1$ 。かつ、 $\langle S_{x_1} \rangle, \dots, \langle S_{x_n} \rangle$  は互いに素であるから、

$$\Xi\left(\bigcup_{i=1}^n \langle S_{x_i} \rangle\right) = k_1 + 1 \quad \text{--- --- ①}$$

同様に、 $\langle T_{y_k} \rangle$  についても

$$\Xi\left(\bigcup_{k=1}^m \langle T_{y_k} \rangle\right) = k_2 + 1 \quad \text{--- --- --- ②}$$

従って、①, ②, Proposition 1 を用いれば、

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 + 2 &\leq \Xi(G_1 \times G_2) \leq \Xi\left(\bigcup_{i=1}^n \langle S_{x_i} \rangle\right) + \Xi\left(\bigcup_{k=1}^m \langle T_{y_k} \rangle\right) \\ &= k_1 + k_2 + 2 \end{aligned}$$

$$\therefore \Xi(G_1 \times G_2) = k_1 + k_2 + 2 \quad \square$$

Lemma 4 において、 $G_1 = K_{2n+1}$ ,  $G_2 = K_{2m+2}$  とおくと、

Theorem(b) より、 $K_{2n+2}, K_{2m+2} \in \mathcal{G}_{\text{odd}}$ 。

$$\therefore \Xi(K_{2n+2} \times K_{2m+2}) = n + m + 2 \quad \text{--- --- --- (*)}$$

Lemma 5  $L(K(m, n)) = K_m \times K_n = K_n \times K_m$

くわしいことは、[11] を参照のこと。

Lemma 6  $K_{2n+1} = F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_n, T = T^* L$ .  $F_i$ :

Hamiltonian cycle. (Theorem A より いえる。) とおくと、

$$\exists I = \{e_i \in E(F_i) \mid i=1, \dots, n\} \text{ s.t. } I: \text{独立集合}$$

(proof) [3] の証明を利用して、独立集合  $I$  を構成する。

$V(K_{2n+1}) = \{v_0, v_1, \dots, v_{2n}\}$  とおくと、Hamiltonian cycle は次のように定めることができる。 i.e.

$$F_i: v_0, v_1, v_{i+1}, v_{i-1}, v_{i+2}, v_{i-2}, \dots, v_{n+i-1}, v_{n+i+1}, v_{n+i}, v_0$$

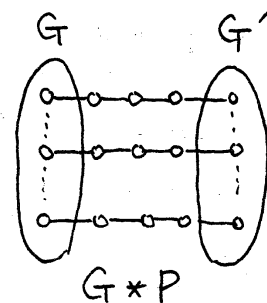
そこで、 $I = \{v_1 v_{n+1}, v_2 v_{n+2}, \dots, v_n v_{2n}\}$  とすれば、 $I$  は独立集合となる。次に、 $v_k v_{n+k}$  ( $k=1, \dots, n$ ) が、異った  $F_i$  に属することを調べる。まず、 $v_k v_{n+k} \in E(F_{[\frac{n+2k}{2}]})$  (添字は  $\text{mod } n$  にとる。) となりしかも。

$$v_j \neq v_k \Rightarrow \left[ \frac{n+2j}{2} \right] \neq \left[ \frac{n+2k}{2} \right] \pmod{n}$$

が確かめられるので、 $v_1 v_{n+1}, \dots, v_n v_{2n}$  は、それぞれ異った  $F_i$  に入っていることになる。  $\square$

ここで、 $G * P$  (ただし、 $P$  は道) なる新しいグラフを定義する。

$G * P$ :  $G$  のコピー  $G'$  を用意し、それぞれ対応する点どうしを道  $P$  でつないだグラフ ( $\Rightarrow$  右図)



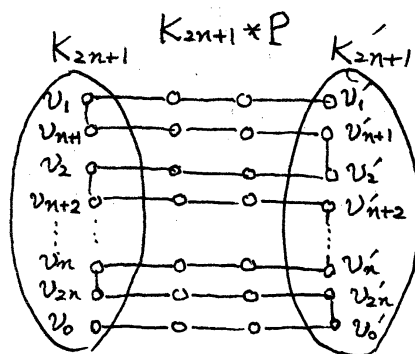
Lemma 7  $\exists (K_{2n+1} * P) = n+1$

(proof)  $K_{2n+1}$  のコピーを  $K'_{2n+1}$  とし

$$V(K_{2n+1}) = \{v_0, \dots, v_{2n}\}$$

$$V(K'_{2n+1}) = \{v'_0, \dots, v'_{2n}\}$$

とおく。Lemma 6 より独立集合は、



$I := \{v_1 v_{n+1}, \dots, v_n v_{2n}\}$  を選ぶ。そして  $H = K_{2n+1} \setminus I$  とおくと、 $\Xi(H) = n$ 。一方、 $K'_{2n+1}$  の頂点集合の置換  $\sigma$  を考えることにより、 $K'_{2n+1}$  から、独立集合  $I' = \{v'_2 v'_{n+1}, v'_3 v'_{n+2}, \dots, v'_n v'_{2n-1}, v'_0 v'_{2n}\}$  を構成すると、 $I'$  は、Lemma 6 の条件を満たす。そこで前と同様に、 $H' = K'_{2n+1} \setminus I'$  とおくと  $\Xi(H') = n$ 。よって、 $\Xi(H \cup H') = n$ 。ところで道  $P$  で結んである部分は、 $I$  と  $I'$  と共に新しい 1 色で塗れるから、 $\Xi(K_{2n+1} * P) \leq n+1$ 。さらに Proposition 3 も考慮すれば、 $\Xi(K_{2n+1} * P) = n+1$ 。□

Lemma 7 で特に  $P = K_2$  とおくと、

$$K_{2n+1} * K_2 = K_{2n+1} \times K_2 \quad \text{----- (α)}$$

$$K_{2n+1} < K_{2n+1} \times K_2 \quad \text{----- (β)}$$

$$\Xi(K_{2n+1}) = \Xi(K_{2n+1} \times K_2) = n+1 \quad \text{--- (γ)}$$

が成立する。

Lemma 8  $\forall G \in \mathcal{G}_{\text{odd}}$  (ただし、 $G$  は  $(2k+1)$ -正則とする。) に対して、 $\Xi(G \times K_{2n+1}) = k + n + 1$

(proof)  $G \times K_{2n+1}$  のグラフで、まず  $G$  に同形なグラフから線形林で覆うことにする。そこで、 $V(G) = \{v_1, \dots, v_m\}$ ,  $V(K_{2n+1}) = \{u_1, \dots, u_{2n+1}\}$ ,  $\mathcal{S}_{ij} = \{(v_i, u_j) \mid v_i \in V(G) \ i=1, \dots, m\}$  とおくと、 $\langle \mathcal{S}_{ij} \rangle \cong G$  となるので仮定より、 $\Xi(\langle \mathcal{S}_{ij} \rangle) = k+1$ 。従って、 $\langle \mathcal{S}_{u_1} \rangle$  は、 $(k+1)$  色の線形林で塗れる。さらに、 $\langle \mathcal{S}_{u_1} \rangle, \dots, \langle \mathcal{S}_{u_{2n+1}} \rangle$  は互いに素なので、 $\langle \mathcal{S}_{u_2} \rangle$  から

$\langle \mathcal{J}_{u_{2n+1}} \rangle$ まで、すべて  $\langle \mathcal{J}_{u_i} \rangle$  と同じ塗り方にしておくと、  
 $\exists(\bigcup_{j=1}^{2n+1} \langle \mathcal{J}_{u_j} \rangle) = k+1$  となる。 $\langle \mathcal{J}_{u_j} \rangle$  の塗り方より、このグラフの各点は、ある色  $C$  の道  $P$  の端点となっている。そこでこの両端点を  $(v_p, u_j), (v_g, u_j)$  とおく。

$$T_{v_p} := \{(v_p, u_j) \mid u_j \in V(K_{2n+1}) \ j=1, \dots, 2n+1\}$$

を定義すると、 $\exists(\langle T_{v_p} \rangle) = \exists(K_{2n+1}) = n+1$ 。さらに、 $\langle T_{v_p} \rangle, \langle T_{v_g} \rangle$  とこれらの点どうしを結ぶ道まで合わせて考えれば、Lemma 7 が適用できるので、 $\exists(\langle T_{v_p} \rangle * P) = n+1$ 。しかも、 $P$  の道の色が  $C$  となるようにできる。この操作を  $\langle \mathcal{J}_{u_j} \rangle$  の各線形木の成分となっている道ごとにくり返し使うことにより、 $\exists(G \times K_{2n+1}) \leq k+n+1$  が得られる。一方、逆の不等式は Proposition 1 より得られる。  $\square$

Lemma 8 で特に、 $\exists(K_{2m+2} \times K_{2n+1}) = m+n+1 \dots\dots (*)$

Lemma 9  $\exists(K_{2n+1} \times K_{2m+1}) = m+n+1$

(proof)  $H = K_{2n+1} \times K_2$  とおくと、 $H$  は奇正則かつ Lemma 7 の特別な場合 (Y) より、 $H \in \mathcal{G}_{\text{odd}}$ 。さらに、Lemma 8 から

$$\exists(H \times K_{2m+1}) = m+n+1 \dots\dots \square$$

$K_{2n+1} \times K_{2m+1}$  は、 $2(m+n)$ -正則グラフより、Proposition 1 より、

$$\exists(K_{2n+1} \times K_{2m+1}) \geq m+n+1 \dots\dots \square$$

ここで、Lemma 7 の (β) より、 $K_{2n+1} \times K_{2m+1} < H \times K_{2m+1}$  に注意し、しかも  $\square, \square$  を合わせると、

$$m+n+1 \leq \Xi(K_{2n+1} \times K_{2m+1}) \leq \Xi(H \times K_{2m+1}) = m+n+1$$

$$\therefore \Xi(K_{2n+1} \times K_{2m+1}) = m+n+1 \quad \square$$

Theorem (f) の (proof) Lemma 5 より,  $\Xi(K_n \times K_n)$  を求め、さらに対称性も考えると、次の3つの場合に帰着する。

Case 1 :  $(m, n) = (\text{odd}, \text{odd})$  ----- この場合は、

Lemma 9 に相当する。

Case 2 :  $(m, n) = (\text{odd}, \text{even})$  ----- Lemma 8 の特別な場合 (\*\*) より得られる。

Case 3 :  $(m, n) = (\text{even}, \text{even})$  ----- Lemma 4 の特別な場合 (\*) より成立することがわかる。

以上をまとめれば、 $\Xi(L(K(m, n))) = \left\{ \frac{m+n-1}{2} \right\} \quad \square$

## 5. 正則グラフについての線形樹化数

どんなグラフ  $G$  も、 $\Delta(G)$ -正則グラフにうめ込められるという事実を使うと、正則グラフの線形樹化数を求めることが本質的な問題となる。しかしながら、任意の正則グラフについては、まだ証明されていない。一般に、 $G$  を  $\gamma$ -正則グラフとすると、秋山の予想 ( $\Xi(G) = \left\{ \frac{\gamma+1}{2} \right\}$ ) が知られており、今までに  $\gamma=3, 4, 5, 6, 8$  の時既に正しいことが証明されている。しかもこれらの結果にはいくつかの証明方法があるので、その方法を紹介することにする。

Theorem(I)  $G$  : cubic graph  $\Rightarrow \Xi(G) = 2$

Theorem (I) の証明方法について.

(I.1) [秋山] ----- 'necessary subgraphs' なる概念を導入し、点の位数による帰納法を用いた証明。

(I.2) [秋山, Chvátal] ----- Vizing の定理を用いて、辺集合をまず  $k$  色に分ける。そのうち 2 色ずつ組にして 2 色で塗り直し、もし cycle ができた時にはその cycle をこわしていく証明。

(I.3) [Horák] ----- ' $\Delta(G) \leq 3 \Rightarrow \chi(G) \leq 2$ ' なる命題を辺の数に関する帰納法を用いる。このとき、初期条件は  $G$  が木の場合としている。

(I.4) [榎本] ----- 次数 2 の点に接続している辺の色を指定して、塗り分ける証明。

(I.5) -----  $\{1, 2\}$ -factor を用いる証明。(特に、maximal acyclic  $\{1, 2\}$ -factor を考えればよい。)

Theorem (II)  $G: 4\text{-regular} \Rightarrow \chi(G) = 3$

Theorem (II) の証明方法について

(II.1) [秋山, Exoo, Harary] ----- cubic graph の線形樹化数の系 (Proposition 4) として求める証明。

(II.2) [秋山, Exoo, Harary] ----- 4-正則グラフを 2 つの 2-factor に分解して、構成的に 3 つの線形林に塗り分ける証明。

(II.3) [中山] -----  $\{1, 2\}$ -factor を用いる証明。(特に、acyclic  $\{1, 2\}$ -factor を考えればよい。)

(II.4) [榎本] ----- 次数2, 3の点に接続している辺の塗りを一部指定して塗り分ける証明。

Theorem (III) [榎本]  $G: 5\text{-regular} \Rightarrow \exists(G) = 3$ .

Theorem (IV)  $G: 6\text{-regular} \Rightarrow \exists(G) = 4$

Theorem (IV) の証明方法について

(IV.1) [榎本] ----- 5-正則グラフの線形樹化数の系 (Proposition 4) として求める証明

(IV.2) [中山] ----- Proposition 2 と Theorem A を用いる証明。

(IV.3) [中山] ----- acyclic  $\{1, 2\}$ -factor を考えて、Theorem (III) を用いる証明。

Theorem (V)  $G: 8\text{-regular} \Rightarrow \exists(G) = 5$

Theorem (V) の証明方法について

(V.1) [榎本] ----- 8-正則グラフ  $G$  を、minimal  $\{3, 4\}$ -factor  $H$  と  $G \setminus H$  の2つの部分グラフに分解し、そのおののを線形林でぬり分ける証明。

(V.2) [中山]

(proof) まず、 $G$  を連結 8-正則グラフとする。このとき、Theorem C より、 $G$  には 2-factor  $F$  が存在する。したがっ

て、 $G \setminus F$  は 6-正則グラフとなる。 $H_1, H_2, \dots, H_\ell$  を  $G \setminus F$  の成分とすると Theorem B より各  $H_i$  は、オイラー回路  $C_i$  をもつ。 $C_i$  の辺をある辺より出発して、順次 2 色の red と blue によって交互に塗っていく。そこで  $H_i^{\text{red}}$  を red の辺によって誘導される  $H_i$  の部分グラフとする。つまり、

$$H_i^{\text{red}} := \langle \{e \in E(H_i) \mid c(e) : \text{red}\} \rangle$$

Case 1:  $|E(H_i)| : \text{even}$

このとき、 $H_i^{\text{red}}$  は 3-正則グラフとなるので、Theorem (I) より、 $\exists(H_i^{\text{red}}) = 2$ 。

Case 2:  $|E(H_i)| : \text{odd}$

この場合、 $H_i^{\text{red}}$  を次のように指定することができる。

$$H_i^{\text{red}} := \begin{cases} \exists v \in V(H_i^{\text{red}}) \text{ s.t. } \deg_{H_i^{\text{red}}} v = 4 \\ \forall u \in V(H_i^{\text{red}}) \setminus \{v\}, \deg_{H_i^{\text{red}}} u = 3 \end{cases}$$

すると Proposition 2 より、 $\exists(H_i^{\text{red}}) = 2$ 。  $H = \bigcup_{i=1}^{\ell} H_i^{\text{red}}$  とおくと、Case 1, 2 より  $\exists(H) = 2$  となることがわかる。一方、 $(H_i \setminus H) \oplus F$  なるグラフは、ある 5-正則グラフにうめ込むことができるので、Theorem (III) と Proposition 3 から、

$$\exists((H_i \setminus H) \oplus F) = 3$$

が得られる。したがって

$$\begin{aligned} \exists(G) &= \exists((G \setminus F) \oplus F) = \exists\left(\bigcup_{i=1}^{\ell} H_i \oplus F\right) \\ &= \exists(H \oplus ((H_i \setminus H) \oplus F)) \end{aligned}$$



$$\leq \Xi(H) + \Xi((H \setminus H) \oplus F) = 5$$

$\Xi(G) \geq 5$  は, Proposition 1 より明らか. よって  $\Xi(G) = 5$  □

### (References)

- [1] J. Akiyama, D. Avis and H. Era, On a  $\{1, 2\}$ -factor of a graph. TRU Math. 16 (1980) 97-102.
- [2] J. Akiyama, Three Developing Topics in Graph Theory (1980).
- [3] M. Behzad, G. Chartrand and L. Lesniak-Foster, Graphs and Digraphs, Prindle. Weber & Schmitt (1979).
- [4] H. Enomoto, The linear arboricity of cubic graphs and 4-regular graphs. (Private).
- [5] H. Enomoto, The linear arboricity of 5-regular graphs, Univ. of Tokyo, Technical Report 81-19 (1981).
- [6] F. Harary, Graph Theory, Addison-Wesley, Reading, Mass. (1969).
- [7] P. Horák, A short proof of the linear arboricity for cubic graphs. (Private).
- [8] C. Thomassen, A remark on factor theorems of Lovász and Tutte, J. Graph Theory 5 (1981)

441-442.

- [9] J. Akiyama, T. Hamada, A note on the arboricity of the complement of a tree, *TRU Math* 13(1977) 55-57.
- [10] J. Moon, On the line graph of the complete bigraph, *Ann. Math. Statist.* 34 (1963).
- [11] A. J. Hoffman, On the line graph of the complete bigraph, *Ann. Math. Statist.* 35 (1964).